Департамент образования г. Москвы

Московский институт открытого образования

Примерные задания школьного тура математической олимпиады

5 класс

1. Таня задумала число, разделила его на 8, из результата вычла 1. Получилось число 250. Какое число задумала Таня?

   Ответ. 2008

   Решение. Нужно проделать обратные операции в обратном порядке.

   250 + 1 = 251

   251 * 8 = 2008

2. В семье пять голов и четырнадцать ног. Сколько из них людей, а сколько собак?

   Ответ. 3 человека и 2 собаки.

   Решение. Предположим сначала, что все пятеро – люди. Это 5 голов и 10 ног. Замена одного человека на собаку дает +2 ноги. У нас пока что недостает 4 ноги. Значит, нужно 2 человека заменить собаками.

3. Девочка заменила каждую букву в своем имени ее номером в русском алфавите, а пробелы поставить забыла. Получилось число 141261. Как ее зовут?

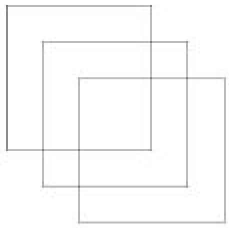
   Ответ: Маша.

   Решение. Рассмотрим варианты деления «141261» на отдельные числа. Номер буквы может быть от 1 до 33. Букв с номерами 41 или 61 не бывает. Это сокращает количество вариантов. Начало имени может быть 1_4 или 14 (АГ или М). Середина может быть 1_2_6, или 12_6, или 1_26(АБЕ, или КЕ, или АШ). И в конце еще 1 (А). Всего 6 вариантов: АГАБЕА, АГКЕА, АГАША, МАБЕА, МКЕА, МАША.

Замечание 1. Вообще, Агаша – одно из сокращений имени Агафья, поэтому если кто-то из детей в качестве ответа приведет это имя, то такое решение тоже следует засчитывать.

Замечание 2. Не требуется разбирать все варианты, достаточно найти правильный.

4. Можно ли нарисовать эту картинку (см. рис.), не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?



Ответ. Да.

Решение. Например, начнем в левом верхнем углу фигуры, и будем обводить левый верхний квадрат. Когда дойдем до пересечения первого квадрата со средним, очертим его полностью и вернемся в ту же точку первого квадрата. Когда дойдем до пересечения первого квадрата с третьим, очертим третий квадрат полностью и после этого закончим первый квадрат.

5. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

Ответ. 432.

Решение. 17 параллелей делят глобус на 18 «полосок» (как будто 17 «горизонтальных» разрезов), по одной части под каждой параллелью и одна часть выше всех параллелей, возле северного полюса. Меридианы же расположены по кругу и делят землю на 24 части, по одной части «справа» от каждого меридиана. Причем, меридианы делят на 24 части каждую «полоску», образованную параллелями. Всего частей будет 18 * 24 = 432

Департамент образования г. Москвы

Московский институт открытого образования

Примерные задания школьного тура математической олимпиады

6 класс

1. Делится ли 457830548573645873639547 на 2008?

   <u>Ответ</u>. Нет.

   <u>Решение</u>. Число 457830548573645873639547 нечетное, а 2008 четное. Нечетное число не может делиться на четное.

2. В семье пять голов и четырнадцать ног. Сколько из них людей, а сколько собак?

   <u>Ответ.</u> 3 человека и 2 собаки.

   <u>Решение.</u> Предположим сначала, что все пятеро – люди. Это 5 голов и 10 ног. Замена одного человека на собаку дает +2 ноги. У нас пока что недостает 4 ноги. Значит, нужно 2 человека заменить собаками.

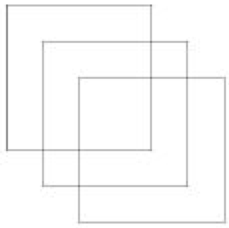
3. Девочка заменила каждую букву в своем имени ее номером в русском алфавите, а пробелы поставить забыла. Получилось число 141261. Как ее зовут?

   Ответ: Маша.

   Решение. Рассмотрим варианты деления «141261» на отдельные числа. Номер буквы может быть от 1 до 33. Букв с номерами 41 или 61 не бывает. Это сокращает количество вариантов. Начало имени может быть 1_4 или 14 (АГ или М). Середина может быть 1_2_6, или 12_6, или 1_26(АБЕ, или КЕ, или АШ). И в конце еще 1 (А). Всего 6 вариантов: АГАБЕА, АГКЕА, АГАША, МАБЕА, МКЕА, МАША.

   Замечание. Не требуется разбирать все варианты, достаточно найти правильный.

4. Можно ли нарисовать эту картинку (см. рис.), не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?



Ответ. Да.

Решение. Например, начнем в левом верхнем углу фигуры, и будем обводить левый верхний квадрат. Когда дойдем до пересечения первого квадрата со средним, очертим его полностью и вернемся в ту же точку первого квадрата. Когда дойдем до пересечения первого квадрата с третьим, очертим третий квадрат полностью и после этого закончим первый квадрат.

5. Винни-Пух и Пятачок пошли в гости к Кролику. Винни-Пух всю дорогу шел с одной скоростью. А Пятачок треть пути бежал в два раза быстрее Винни-Пуха, а потом устал, и оставшуюся часть пути шел в два раза медленнее. Кто придет в гости к Кролику раньше?

Ответ. Винни-Пух.

Решение 1. Две трети пути пятачок шел в два раза медленнее, чем Винни-Пух, он затратил на преодоление этого участка в 2 раза больше времени, чем Винни-Пух на этот участок. За это время Винни-Пух мог бы пройти в два раза большее расстояние, т.е. 4/3 всего пути. Т.е. Винни-Пух на всю дорогу потратил меньше времени, чем Пятачок только на второй участок!

Решение 2. Пусть Винни-Пух шел в гости к Кролику X минут. Первую треть пути он прошел за X/3 минут, а Пятачок в 2 раза быстрее, т.е. за X/6 минут. Оставшиеся 2/3 пути Винни-Пух прошел за 2X/3 минут, а Пятачок в 2 раза медленнее, т.е. за 4X/3 минут. Всего пятачок шел X/6 + 4X/3 = 3X/2, это в полтора раза дольше, чем Винни-Пух, независимо от значения X.

Замечание. Решения, где ребенок считает расстояния и скорости конкретными (а не неизвестными x, y и т.п.), например, «допустим, идти 12 километров, а скорость Пуха 4 км/ч...», нужно оценивать примерно как ползадачи.

Департамент образования г. Москвы

Московский институт открытого образования

Примерные задания школьного тура математической олимпиады

7 класс

1. Иван Иванович купил собаку. Саша думает, что эта собака – черный пудель, Паша считает ее белой болонкой, а Маша – черным бультерьером. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо породу, либо цвет шерсти собаки. Назовите породу собаки и цвет ее шерсти.

   Ответ. Черная болонка.

   Решение. Двое из детей считают, что собака черная. Они либо оба угадали цвет, либо оба угадали породу (т.к. назвали один и тот же цвет). Угадать породу оба ребенка не могли, т.к. они заявили разные породы. Значит, они оба угадали цвет, т.е. собака была черная. Паша не угадал цвет, значит он угадал породу — болонка.

2. Одну даму спросили: «Сколько вам лет?». Дама вздохнула и ответила: «Ближе к сорока, чем к тридцати». Сколько лет могло быть даме?

   Ответ. Даме больше 35 лет.

   Решение. Очевидно, что дама не может быть младше 30 лет, но может быть старше 40 лет (любой больший возраст ближе к 40, чем к 30). Теперь рассмотрим возрастной интервал от 30 до 40. Между 30-ым и 35-ым днем рождения ровно 5 лет. И между 35-ым и 40-ым днем рождения ровно 5 лет. 40 лет ближе, если твой 35-ый день рождения уже прошел. Т.е. даме может быть 35 и более лет.

   Замечание. Ответ «даме 35 или больше лет» нужно засчитывать как правильный (т.к. ребенок может подразумевать, что ей исполнилось 35 лет). Ответ «36 лет и больше» можно засчитывать и расценивать как мелкий недочет.

3. Банка, наполовину наполненная молоком, весит 1570 г. Когда Миша выпил четверть всего имеющегося в банке молока, она стала весить 1270 г. Сколько весит пустая банка?

   Ответ. 370 г.

   Решение. «Четверть имеющегося количества», которую отпил Миша весила 1570 - 1270 = 300 г, значит все «имеющееся количество молока» весило 4 * 300 = 1200 г. Пустая банка весит 1570 - 1200 = 370 г

   Замечание. Условие задачи можно было неправильно понять следующим образом: «когда Миша выпил четверть *полной* банки молока...». Однако в этом случае получается противоречие: банка, полная на три четверти весит меньше, чем полбанки.

4. *a*, *b*, *c* – три различные цифры. Если сложить все шесть двузначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру дважды в одном числе, то получится 528. Найдите эти цифры.

   Ответ. Цифры 7, 8, 9 в любом порядке.

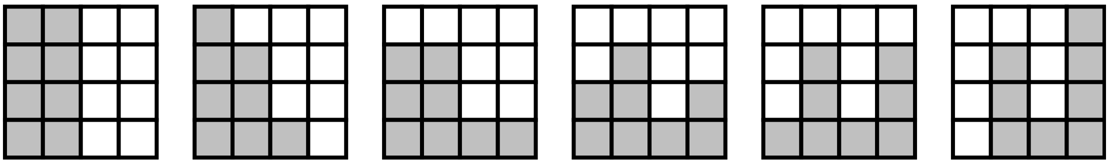
   Решение 1. Выпишем все эти числа: ab, ac, ba, bc, ca, cb. Если сложить все цифры из разряда единиц, то получится b+c+a+c+a+b=2(a+b+c). Если сложить все десятки, получится: b0+c0+a0+c0+a0+b0=20(a+b+c). Итого все числа в сумме дадут 2(a+b+c)+ 20(a+b+c)=22(a+b+c). Поэтому a+b+c=528:22=24. Три различные цифры в сумме должны дать 24. Сумма трех самых больших цифр 7+8+9=24. Если какую-то (или несколько) из цифр уменьшить, то и сумма будет меньше 24. Т.е. это могут быть только цифры 7, 8, 9.

   Решение 2. Разделим 528 на 6, чтобы прикинуть, чему должны быть «в среднем» равны двузначные числа. Получается 88! Двузначные числа были очень большими и цифры, из которых они состоят, тоже видимо очень большие. Попробуем цифры 7, 8, 9: 78 + 79 + 87 + 89 + 97 + 98 = 528! Ура, подходят. Почему это не могла быть какая-нибудь другая тройка цифр? Потому что тогда образованные двузначные числа, выписанные по возрастанию оказались бы меньше, чем соответствующие числа из ряда 78, 79, 87, 89, 97, 98, а их сумма была бы меньше 528.

Замечание. Писать, как ребенок додумался взять цифры 7, 8, 9 не обязательно. Достаточно проверить, что они подходят и доказать, что других вариантов быть не может. Также можно не приводить различные перестановки этих цифр ({8,7,9}, {8,9,7}, и т.д.). А вот объяснить, почему не могут быть другие 3 цифры обязательно, без этого задача решена наполовину.

5. Найдите 6 способов разрезания квадрата 4×4 на одинаковые части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток (способы считаются различными, если части, получающиеся при одном способе, не равны частям, получающимся при другом способе).

   Ответ.

6. В 100-этажном доме установлен лифт с двумя кнопками. Если нажать на первую кнопку, мы поднимемся на 7 этажей вверх, если нажать на вторую – спустимся на 9 этажей вниз. Как попасть с 1-го этажа на 72-й?

   Ответ. Один из способов: 14 раз нажать вверх, потом 3 раза вниз.

   Проверка ответа. 1 + 14*7 = 99; 99 - 3*9 = 72

   Решение. Нажав две кнопки по очереди, мы опускаемся на 2 этажа вниз. Поэтому, чтобы достичь 72-го этажа достаточно все время подниматься и подняться на какой-нибудь четный этаж выше 72-го, а потом спускаться по 2 этажа. Первый такой этаж — 78-ой. Итого, мы проехали 11 раз вверх, потом вверх-вниз, вверх-вниз и еще раз вверх-вниз. Для красоты можно поменять порядок действий: сначала 14 раз вверх, потом 3 раза вниз. За пределы 100 этажей мы не выезжаем.

   Замечание. Достаточно привести ответ и проверку, можно не объяснять, как был найден ответ.

Департамент образования г. Москвы

Московский институт открытого образования

Примерные задания школьного тура математической олимпиады

8 класс

1. Делится ли 457830548573645873639522 на 2008?

   <u>*Ответ*</u>. Нет.

   <u>*Решение*</u>. Число 457830548573645873639522 не делится на 4, т.к. число, составленное из двух последних цифр на 4 не делится (признак делимости на 4), а 2008 делится на 4. Неделящееся на 4 число не может делиться на делящееся.

2. На параде солдаты выстроены в две шеренги одинаковой длины, причем в первой шеренге расстояние между соседними солдатами на 20% больше, чем во второй (между соседними солдатами в одной шеренге одинаковое расстояние). Сколько солдат в первой шеренге, если во второй шеренге 85 солдат?

   <u>*Замечание.*</u> *Предполагается, что все солдаты занимают в шеренге одинаковое место.*

   <u>*Ответ*</u>. В первой шеренге могло быть от 72 до 84 солдат.

   <u>*Решение*</u>. Пусть расстояние между солдатами во второй шеренге х, тогда в первой на 20% больше, т.е. 1,2х. Раздвинем всех солдат во второй шеренге вправо так, чтобы расстояние между ними оказалось равно 1,2х, тогда каждый промежуток увеличится на 1,2х-х=0,2х, т.е. у нас образуется лишнего пространства справа 84*0,2х. Нам нужно убрать из этого пространства несколько человек, чтобы оставшиеся заняли прежнюю длину. Убирая каждого человека с краю, мы убираем и пространство между ним и следующим. Посмотрим, какое максимальное число промежутков длины 1,2х мы можем убрать. Так как (84*0,2х):(1,2х)=14, то мы могли бы убрать максимум 14 промежутков, но тогда на сами солдаты не занимали бы места, а такого быть не может. То есть мы можем максимум выкинуть 13 промежутков. Итак, если мы

выкидываем n солдат (n изменяется от 1 до 13), то с ними выкидывается n промежутков длины 6x/5, а на них самих приходится расстояние (84*0,2x) – n*(1,2x)= (14-n)*1,2x, т.е. на одного солдата приходится расстояние ((14-n)*1,2x)/n

Т.о. зная, сколько места занимает в строю один человек, мы для каждого n от 1 до 13 можем вычислить, каким должно быть расстояние x, чтобы стоящие в ряд 85 человек с расстоянием x занимали столько же места, сколько и стоящие в ряд 85-n человек с расстоянием 1,2x.

Замечание. Если считать, что солдаты занимают нулевое расстояние, т.е. считать солдат точками, то задача имеет единственное решение:

Во второй шеренге 85 «точечных» солдат, между ними 84 интервала длины x. В первой шеренге интервалы на 20% длиннее, т.е. 1,2x. Так как общая длина интервалов такая же, то, количество интервалов в первой шеренге в 1,2 раза меньше; 84/1,2 = 70. В первой шеренге 70 интервалов, т.е. 71 солдат.

Итак, в этом случае ответ в первой шеренге 71 солдат.

Если ребята при решении считали солдат точками, то такое решение тоже стоит засчитывать.

3. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

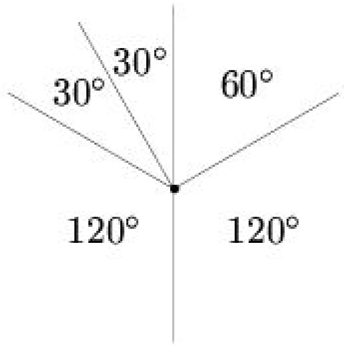
   Ответ. Через 7 минут.

   Решение. Чтобы горячей воды в ванне оказалось в 1,5 раза больше, чем холодной, холодный кран должен наполнить 2/5 ванны, а горячий — 3/5 (чтобы узнать это, можно было обозначить объём ванной за 1, объём холодной воды за x; тогда x + 1,5x = 1, откуда x = 2/5). Но тогда горячий кран должен быть открыт всего (2/3)*23 = 69/5 минут, а холодный — на (2/5)*17 = 34/5 минут. Значит, холодный кран нужно открыть через (69/5) – (34/5) = 35/5 = 7 минут.

4. Можно ли провести из одной точки на плоскости пять лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых? Рассматриваются углы не только между соседними, но и между любыми двумя лучами.

   Ответ. Да, можно

   Решение. Например, лучи можно расположить так:



5. Витя считает, что дроби "сокращают", зачёркивая одинаковые цифры в числителе и знаменателе. Серёжа заметил, что иногда Витя получает верные равенства, например $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$.
   Найдите все правильные дроби с числителем и знаменателем, состоящими из двух ненулевых цифр, которые можно так "сократить".

   Ответ. 26/65, 49/98, 19/95, 16/64.

   Решение.

   В принципе возможны четыре варианта такого "сокращения" :
   1) $\frac{\overline{\cancel{b}a}}{\overline{\cancel{b}c}}$, 2) $\frac{\overline{a\cancel{b}}}{\overline{c\cancel{b}}}$, 3) $\frac{\overline{\cancel{b}a}}{\overline{c\cancel{b}}}$, 4) $\frac{\overline{a\cancel{b}}}{\overline{\cancel{b}c}}$.
   Рассмотрим все 4 возможных случая.
   1) $\frac{\overline{\cancel{b}a}}{\overline{\cancel{b}c}}$ Получаем (10 b + a) / (10 b + c) = a/c, откуда
   (10b + a)c = (10b + c)a,
   10bc + ac = 10ba + ca,
   bc = ba. По условию b ≠ 0, поэтому на b можно сократить.
   Следовательно, c = a, а по условию дробь правильная.
   Поэтому в первом случае решений нет.
   2) $\frac{\overline{a\cancel{b}}}{\overline{c\cancel{b}}}$ Аналогично первому случаю получаем

(10a + b)c = (10c + b)a,
10ac + bc = 10ca + ba,
bc = ba.
Так как b ≠ 0, то c = a, а по условию дробь правильная. Итак, в этом случае решений тоже нет.
3) $\dfrac{\overline{\cancel{b}a}}{\overline{c\cancel{b}}}$ Аналогично первому случаю получаем
(10b + a)c = (10c + b)a,
10bc + ac = 10ca + ba,
10bc = 9ac + ab,
9c(a – b) = b(c – a).
Так как дробь правильная, то a < c. Следовательно, a > b, откуда a – b ≥ 1. Получаем 9c(a – b) ≥ 9c > 9(c – a) ≥ b(c – a), т. е. 9c(a – b) > b(c – a), что невозможно. Итак, в этом случае решений нет.
4) $\dfrac{\overline{a\cancel{b}}}{\overline{\cancel{b}c}}$ Аналогично первому случаю получаем
(10a + b)c = (10b + c)a,
10ac + bc = 10ba + ca,
9ac + bc = 10ba.
Дальше проще решать перебором. Мы приводим один из вариантов перебора, стараясь сократить длину перебора за счёт дополнительных соображений.
Случай c = 1 невозможен, так как дробь a/c правильная.
Если c = 2, то a = 1 (так как дробь a/c правильная).
Получаем 18 + 2b = 10b, откуда 18 = 8b. Решений нет.
Если c = 3, то a = 1 или a = 2. Получаем
27 + 3b = 10b или 54 + 3b = 20b
27 = 7b или 54 = 17b
Решений нет.
Если c = 4 , то a = 1 , a = 2 или a = 3. Получаем
36 + 4b = 10b или 72 + 4b = 20b или 108 + 4b = 30b,
36 = 6b или 72 = 16b или 108 = 26b.
Получаем одно решение a = 1, b = 6, которому соответствует одна из искомых дробей:
1$\cancel{6}$/$\cancel{6}$4 = 1/4.
Если c = 5 , то a = 1 , a = 2 , a = 3 или a = 4. Получаем
9 + b = 2b или 18 + b = 4b или 27 + b = 6b или 36 + b = 8b
9 = b или 18 = 3b или 27 = 5b или 36 = 7b.
Получаем два решения a = 1, b = 9 или a = 2, b = 6.
Получаются ещё две дроби:
1$\cancel{9}$/$\cancel{9}$5 = 1/5 и 2$\cancel{6}$/$\cancel{6}$5 = 2/5.

Если c = 6, то a = 1 , a = 2 , a = 3 , a = 4 или a = 5. Получаем 27 + 3b = 5b или 54 + 3b = 10b или 81 + 3b = 15b или 108 + 3b = 20b или 135 + 3b = 25b

27 = 2b или 54 = 7b или 81 = 12b или 108 = 17b или 135 = 22b

Решений нет.

Если c = 7, то получаем равенство 63a + 7b = 10ab. Левая часть равенства, делится на 7, значит либо a либо 6 делится на 7 (так как 7 — простое число). Так как дробь правильная, то a < 7. Следовательно, единственный вариант для b — это 7. Получаем 63a + 49 = 70a, откуда a = 7, но a должно быть меньше семи, так как дробь правильная. Решений нет.

Если c = 8, то получаем равенство 72a + 8b = 10ab, откуда 36a + 4b = 5ab. Перебирая все возможные варианты для a, получаем ещё одно решение (a = 4, b = 9):

$4\cancel{9}/\cancel{9}8 = 4/8$.

Если c = 9, то получаем равенство 81a + 9b = 10ab. Так как левая часть делится на 9, то и правая часть должна делиться на 9, а значит, либо a = 9, либо b = 9, либо a и b делятся на 3. Если a и b делятся на 3, то левая часть делится на 27, а значит одно из чисел a, b равно 9. С другой стороны, a < c = 9. Следовательно, b = 9, откуда 81a + 81 = 90a, 9a + 9 = 10a, a = 9 = c, что невозможно.

Департамент образования г. Москвы

Московский институт открытого образования

Примерные задания школьного тура математической олимпиады

9 класс

1. В записи ***** × 1111 = *******1 замените звёздочки нулями и единицами так, чтобы получилось верное равенство.

   Ответ. 10001*1111=11111111.

   Для полного решения достаточно привести правильный ответ.

   Можно доказать, что других решений нет:

   Способ 1. Ответ мы, допустим угадали. Заметим, что в этом примере произведение максимальное из возможных (с учетом, что можно использовать только 0 и 1). Поэтому первый сомножитель никак не может быть больше, чем 10001. пятизначное число, меньшее 10001 — это только 10000. 10000 не подходит. Поэтому других вариантов нет.

   Способ 2. Как известно, чтобы найти N цифр с конца произведения, от сомножителей достаточно знать тоже только последние N цифр. Начнем подбирать цифры сомножителя *****, начиная с конца. Для каждого разряда мы проверяем 2 варианта (0 или 1). Последний разряд должен быть 1, чтобы произведение кончалось на 1, следующие разряды не могут быть единицами (появляются двойки в «хвосте» произведения), наконец самый старший разряд должен быть 1.

2. После того, как пешеход прошел 1 км и половину оставшегося пути, ему еще осталось пройти треть всего пути и 1 км. Чему равен весь путь?

   Ответ. 9 км.

   Решение. Обозначем весь путь за X. Тогда участки пути будут иметь следующие длины в километрах (в порядке упоминания в задаче): 1, (X-1)/2, X/3, 1. И сумма длин этих участков — это весь путь. Получаем уравнение 1 + (X-1)/2 + X/3 + 1 = X. Корень X = 9

3. Петин счет в банке содержит 5000 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 400 долларов или добавлять 198 долларов. Какое наибольшее число денег Петя сможет снять со счета?

   Ответ. Может снять все деньги ($5000)

   Решение. Если на счету есть хотя бы 4 доллара, Петя может выполнить следующую комбинацию: два раза положить по 198 (денег на счету станет не меньше 4 + 198 + 198 = 400), а потом снять 400. В результате комбинации он снимает 400 - 2 * 198 = 4 доллара. Повторив эту комбинацию 5000 / 4 = 1250 раз, Петя снимет все деньги. Причем до последнего момента будет выполняться условие применимости комбинации: число денег на счету не меньше 4.

   Замечание. Даже если вначале у Пети не было на руках наличных денег, он может вначале (пока на счету большее $400) повторять свою операцию в порядке «снять $400», «положить $198», «положить $198». После того, как на счету станет меньше $400 у Пети будет на руках больше, чем 2*198=396, т.е. он может выполнять эту операцию в обратном порядке: «положить $198», «положить $198», «снять $400».

4. Известно, что $a+b+c=0$. Докажите, что $ab+bc+ca \leq 0$

   Решение. Возведем в квадрат. $(a+b+c)*(a+b+c) = 0$ $a^2+b^2+c^2 +2(ab+bc+ca) = 0$ или

   $2(ab+bc+ca)= -(a^2+b^2+c^2)\leq 0$, ч.т.д.

5. Как разделить угол в 19 градусов на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки?

   Решение. С помощью циркуля и линейки мы умеем откладывать угол, равный данному. Отложим последовательно несколько углов с общей вершиной, равных данному. Так как 360/19=18,947... ≤ 18, то всего у нас по кругу уместится 18 таких углов, а 19-й наложится на первый. Суммарная градусная мера 19 углов 19*19=361 градус, т.е. образуется «перехлест» в 361 — 360 = 1 градус. Тем самым мы научились откладывать угол в 1 градус. Этот угол в 1 градус отложим внутри исходного угла 18 раз.

6. В лицее половину учащихся составляли девочки, а половину – мальчики. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее стала составлять 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

   Ответ. Уменьшилось.

   Решение. Пусть сперва в лицее училось n человек. Мальчиков было 0,5 n. На следующий год в лицее стало 0,9 n человек, мальчиков стало 55%, т.е. $0{,}9\ n *0{,}55 = 0{,}495\ n$, что меньше, чем 0,5 n.

Департамент образования г. Москвы

Московский институт открытого образования

Примерные задания школьного тура математической олимпиады

10 класс

1. Решить уравнение в натуральных числах x+1/(y+1/z)=10/7

   Ответ. {1;2;3}

   Решение. y+1/z > 1, поэтому 1/(y+1/z) принадлежит (0;1), поэтому x = 1; 1/(y+1/z) = 3/7; y+1/z = 7/3. 1/z принадлежит (0;1], поэтому y = 2, z = 3

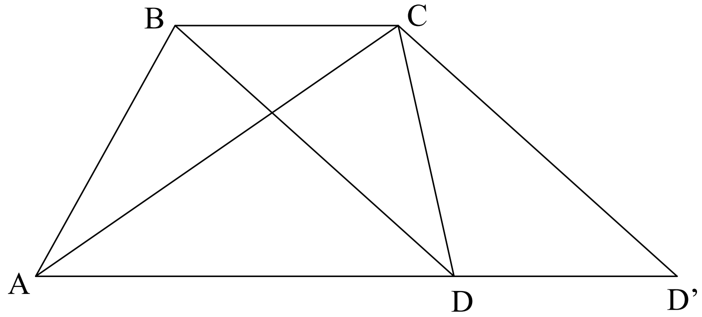
2. После того, как пешеход прошел 1 км и половину оставшегося пути, ему еще осталось пройти треть всего пути и 1 км. Чему равен весь путь?

   Ответ. 9 км.

   Решение. Обозначем весь путь за X. Тогда участки пути будут иметь следующие длины в километрах (в порядке упоминания в задаче): 1, (X-1)/2, X/3, 1. И сумма длин этих участков — это весь путь. Получаем уравнение 1 + (X-1)/2 + X/3 + 1 = X. Корень X = 9

3. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4 см. Найти площадь трапеции, если известно, что длина одной из диагоналей равна 5 см.

   Ответ. 50/3 см^2



Решение. Обозначим AC диагональ, длина которой нам дана, другую диагональ BD (см рис).

На продолжении стороны AD за точку D отметим точку D' так, что BC=DD'. Тогда площадь трапеции ABCD равна площади треугольника ACD' (высоты у трапеции и треугольника равны, а длина основания AD' треугольника равна сумме длин оснований трапеции). Так как BC=DD' и BC||DD', то BCD'D – параллелограмм, т.е. CD'||BD. Так как по условию диагонали трапеции перпендикулярны, то CD'$\perp$AC, т.е. треугольник ACD' – прямоугольный. Итак, осталось найти площадь прямоугольного треугольника с катетом 5 см и высотой 4 см. Это стандартная задача. Высота прямоугольного треугольника разбивает его на два меньших треугольника подобных исходному. Пусть катет исходного треугольника x, тогда его гипотенуза 5x/4 (из подобия). По теореме Пифагора $5^2 + x^2 = (5x/4)^2$, $9x^2 = 25*16$, x = 20/3. Зная катеты, находим площадь треугольника: S = (20/3 см * 5 см)/ 2 = 50/3 см^2

4. Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая – на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

   Ответ. хозяйки потратили денег поровну, но вторая купила больше молока.

   Решение. Затраты первой хозяйки равны сумме цен молока за все дни. Если разделить это на количество дней, то получится как раз средняя цена молока (по определению средней цены), т.е. 20 рублей. Значит, потратили они одинаково денег.

   Вторая хозяйка покупала больше дешевого молока и меньше дорогого. Т.е. средняя цена молока, купленного ей меньше 20 рублей. А денег обе хозяйки потратили одинаково, значит вторая купила больше молока.

5. Васю попросили составить квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, который имеет два различных корня, и написать на доске его дискриминант. Вася написал на доске число 27. Какую оценку следует поставить Васе и почему?

Ответ. Васе следует поставить двойку.

Решение. D = $b^2 - 4ac$. $4ac$ делится на 4, а b^2 не может давать остаток 3 при делении на 4 (квадраты всех натуральных чисел дают остаток 0 или 1 при делении на 4). А 27 как раз дает остаток 3. Поэтому Вася ошибся.

Департамент образования г. Москвы

Московский институт открытого образования

Примерные задания школьного тура математической олимпиады

11 класс

1. Решить уравнение в натуральных числах x+1/(y+1/z)=10/7

   Ответ. {1;2;3}

   Решение. y+1/z > 1, поэтому 1/(y+1/z) принадлежит (0;1), поэтому x = 1; 1/(y+1/z) = 3/7; y+1/z = 7/3. 1/z принадлежит (0;1], поэтому y = 2, z = 3

2. Из пункта А в другие можно попасть двумя способами:

   - Выйти сразу и идти пешком.
   - Вызвав машину и, подождав ее определённое время, ехать на ней.

   В каждом случае используется способ передвижения, требующий меньшего времени. При этом оказывается, что

если конечный пункт отстоит на	то понадобится на дорогу
1 км	10 мин
2 км	15 мин
3 км	17,5 мин

   Скорости пешехода и машины, а также время ожидания машины, принимаются неизменными. Сколько понадобится времени для достижения пункта, отстоящего от А на 6 км?

   Ответ. 25 мин.

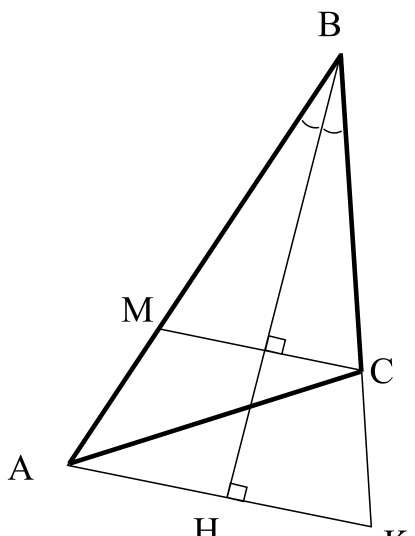
   Решение. Очевидно, что если на какое-то расстояние выгоднее ехать на машине, то и на все большие тоже на машине. Способы для 1 км и 2 км не могут быть оба «пешком», иначе время было бы пропорциональное (отличалось ровно в 2 раза). Не могут и все 3 способа быть «на машине», иначе была бы линейная зависимость времени от расстояния (время езды пропорционально расстоянию + константа ожидания), а этого не наблюдается. Вывод: 1 км шли пешком, а 2 км и 3 км ехали на машине. Найдем линейную зависимость при езде на машине. Прирост времени за 1 километр составляет 2,5 минут, т.е. T = S * 2,5 мин/км + 10 мин. Подставляя 6 км, получаем 25 мин

<u>Замечание</u>. Если ребенок просто «догадался», что 1 км пешком, а 2 км и 3 км на машине, не доказав это, то задача не решена.

3. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC. Они пересекают прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите длину AB, если BM = 8 см, KC = 1 см и AB > BC.

   Ответ. 9 см.

   Решение. Обозначим через H точку пересечения AK и биссектрисы угла ABC . Тогда в треугольнике ABK отрезок BH является биссектрисой и высотой. Следовательно, треугольник ABK – равнобедренный. Аналогично доказывается, что треугольник MBC равнобедренный. Т.к. по условию AB > BC, то точка M лежит на отрезке AB, точка C лежит на отрезке BK. AB=BK=BC+CK=BM+CK=8 см+1 см=9 см



4. Васю попросили составить квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, который имеет два различных корня, и написать на доске его дискриминант. Вася написал на доске число 27. Какую оценку следует поставить Васе и почему?

Ответ. Васе следует поставить двойку.

Решение. $D = b^2 - 4ac$. $4ac$ делится на 4, а b^2 не может давать остаток 3 при делении на 4 (квадраты всех натуральных чисел дают остаток 0 или 1 при делении на 4). А 27 как раз дает остаток 3. Поэтому Вася ошибся.

5. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма ребер внутренней пирамиды больше суммы ребер внешней?

Ответ. Да, может.

Решение. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду с основанием BCD и вершиной A. Пусть длина стороны основания равна ε, а длина бокового ребра равна 1. Возьмём на стороне AD точку D' так, что $AD' = \varepsilon$. Тогда у пирамид ACBD и ACBD' общее основание и если ε мало, то сумма длин рёбер пирамиды ABCD близка к 3, а сумма длин рёбер пирамиды ABCD' близка к 4. В качестве ε можно взять, например, 1/100.